

STRUCTURE SPINORIELLE ASSOCIÉE À
UN ESPACE VECTORIEL QUATERNIONNIEN
À DROITE E SUR \mathbf{H} , MUNI D'UNE FORME
SESQUILINÉAIRE b NON DÉGÉNÉRÉE
H-ANTI HERMITIENNE
(Spin - Structures Over n -Dimensional
Skew-Hermitian \mathbf{H} -Spaces)

Pierre Angles

*UFR MIG - Université Paul Sabatier
118 route de Narbonne F-31062
Toulouse 04 France*

(Received: April 15, 2005; Accepted: July 29, 2005)

Abstract. This paper, self-contained, deals with the study of Clifford Algebras associated with n -dimensional skew-hermitian spaces over the skew field \mathbf{H} . The different structures associated with the spaces S of corresponding spinors are given and the natural imbeddings of associated spinor groups are revealed.

1. Introduction

On considère le groupe $U_n(E, b)$ dit *groupe symplecto-quaternionien*, groupe unitaire d'une forme sesquilinéaire b non dégénérée \mathbf{H} -anti-hermitienne sur un espace vectoriel quaternionien à droite E sur \mathbf{H} . On définit T par $T(x) = xj$.

Advances in Applied Clifford Algebras **15** No. 2, 291-316 (2005)

T est un opérateur anti-linéaire de l'espace vectoriel \sum_{2n} sous-jacent à E et est même une σ -semi-similitude de \sum_{2n} - (σ désigne la conjugaison usuelle de C) - $SU_n(E, b)$ s'identifie au groupe noté $SO^*(2n)$, dans la classification de Elie Cartan. C'est donc essentiellement à $SO^*(2n)$, appelé faute de mieux, groupe spécial symplecto-quaternionien, qu'on va s'intéresser. On considère l'algèbre de Clifford C_{2n}^+ , paire naturellement associée à la forme quadratique attachée à $a(x, y)$, forme bilinéaire symétrique complexe, composante suivant j de $b(x, y)$. C_{2n}^+ est une algèbre complexe, composée directe de deux sous-algèbres centrales simples complexes isomorphes à $m(2^{n-1}, \mathbf{C})$, comme on le vérifie. On définit une semi-involution \tilde{T} de C_{2n}^+ , σ -semi-automorphisme de C_{2n}^+ naturellement associé à T .

Comme $SO^*(2n)$ est le commutant de T dans $SO(2n, \mathbf{C})$, on introduit alors l'algèbre réelle $Cl_{2n}^* = \{g \in C_{2n}^+ : \tilde{T}(g) = g\}$ de telle sorte que Cl_{2n}^* est toujours isomorphe à $m(2^{n-1}, \mathbf{C})$ et que $\dim_{\mathbf{R}} Cl_{2n}^* = 2^{2n-1}$. On définit la notion d'application de Clifford de type symplecto-quaternionien. Cl_{2n}^* apparaît comme solution d'un problème universel associé à une application de Clifford universelle. On définit ensuite les groupes de revêtements $RSO^*(2n)$ et le groupe spinoriel correspondant noté $Spin_{2n}^*$. Puis on s'intéresse à l'espace S des spineurs associé à Cl_{2n}^* . S est naturellement muni d'une structure pseudo-hermitienne neutre telle que $Spin_{2n}^* \subset SU(2^{n-2}, 2^{n-2})$.

2. Algèbres de Clifford des Espaces Pseudo-Euclidiens Réels et des Espaces Quadratiques Réguliers sur \mathbf{C}

2.1. LES ALGÈBRES DE CLIFFORD $C_{r,s}$ ET $C_{r,s}^+$

Soit $V = E_{r,s}$ l'espace pseudo-euclidien standard, de dimension $m = r + s$, de type (r, s) , [2,a],[2,e],[5].

On note $(x|y) = x^1y^1 + \dots + x^ry^r - x^{r+1}y^{r+1} \dots - x^{r+s}y^{r+s}$ son produit scalaire. $C(V) = C_{r,s}$ désigne l'algèbre de Clifford de V , quotient de $\otimes E_{r,s}$ par l'idéal bilatère engendré par les éléments $\{x \otimes x - (x|x).1, x \in V\}$. On utilise, ici, les notations de [5] et [6]. $C(V)$ est une algèbre associative unitaire de dimension 2^m sur \mathbf{R} . π désigne l'involution naturelle de $C(V)$; τ l'anti-automorphisme principal de $C(V)$, unique antiautomorphisme de $C(V)$ laissant invariants les éléments de V - τ est une anti-involution de l'algèbre $C(V)$ -; $\nu = \pi \circ \tau = \tau \circ \pi$ est la conjugaison de $C(V)$. $C_{r,s}^+ = C^+(V)$ est la sous-algèbre des éléments de $C(V)$, de dimension 2^{m-1} sur \mathbf{R} . Comme dans [5], on convient d'appeler *groupe de Clifford* de V , ou encore selon [6], *groupe de Clifford régulier* de V , le groupe noté

G , que forment avec l'unité $1_{C(V)}$ de l'algèbre $C(V)$, pour la multiplication, les produits de vecteurs non isotropes de V . C'est aussi le groupe, que forment pour la multiplication, les éléments inversibles g de l'algèbre de Clifford $C(V)$ qui satisfont à la condition : $\forall x \in V \pi(g)xg^{-1} = y \in V$. N , respectivement N' , désigne la norme spinonelle ordinaire, respectivement norme spinorielle graduée, définies, respectivement, pour tout élément g du groupe de Clifford G (régulier) par $\tau(g).g = g^\tau.g = N(g).1_{C(V)}$ et par $\nu(g).g = g^\nu.g = N'(g).1_{C(V)}$. N et N' sont des homomorphismes du groupe de Clifford (régulier) dans le groupe multiplicatif \mathbf{R}^* qui appliquent le centre $\mathbf{R}^*.1_{C(V)}$ du groupe de Clifford régulier sur $(\mathbf{R}^*)^2$. Pour $y = x_1x_2\dots x_p$, produit de vecteurs réguliers de V , $N'(g) = (-1)^p N(g)$ et $g^{-1} = \frac{g^\tau}{N(g)} = \frac{g^\nu}{N'(g)}$.

On désigne par $Spin V$, le noyau de la restriction de N à $G^+ = C^+(V) \cap G$, formé par les $g \in G$ produits d'un nombre pair de vecteurs réguliers de V .

Pour $m > 2$, ce groupe $Spin V$, le groupe spinoriel de V est connexe et contenu dans G^{++} , groupe que forment les $g \in G$ qui sont produits d'un nombre pair de "vecteurs positifs" et d'un nombre pair de "vecteurs négatifs".

Le groupe $Spin V$ engendre linéairement $C^+(V) = C_{r,s}^+$, sous-algèbre des éléments pairs, dans laquelle il est plongé. Nous allons, maintenant, étudier de façon précise la structure des algèbres $C_{r,s}$ et celle des $C_{r,s}^+$.

2.2. CLASSIFICATION DES ALGÈBRES DE CLIFFORD $C_{r,s}^+ = C^+(V)$

Comme il est noté dans [6], si u est un vecteur de V tel que $(u|u) = \varepsilon = \pm 1$, l'application φ de u dans $C^+(V)y \in u^\perp \rightarrow uy = \varphi(y)$ est telle que $(\varphi(y))^2 = -\varepsilon(y|y)$ et représente $C^+(V)$ comme l'algèbre de Clifford de l'espace vectoriel u^\perp muni de la forme quadratique induite de celle V multipliée par $(-\varepsilon)$; donc de signature $(r, s - 1)$ si $\varepsilon = -1$ ou $(s, r - 1)$ si $\varepsilon = 1$. Toutes ces structures d'algèbres de Clifford sur $C^+(V)$ correspondant aux différents choix de u , définissent la même anti-involution de conjugaison qui coïncide avec la restriction de τ à $C^+(V)$.

On peut établir la table suivante fondamentale qui donne explicitement la classification des algèbres de Clifford $C_{r,s}$ et $C_{r,s}^+$, suivant la congruence modulo 8 de $r - s$. (Ce résultat est lié à la nature du groupe de Brauer-Wall de \mathbf{R} : $BW(\mathbf{R}) = \mathbf{Z}/8\mathbf{Z}$, comme l'a montré C.T.C. Wall [20] et [25], chapitre 5, paragraphe 4, page 126). On note $m(n, F)$ l'algèbre réelle des matrices $n \times n$ sur le corps $F = \mathbf{R}, \mathbf{C}$, ou \mathbf{H} , le corps usuel des quaternions. ($[k]$ désigne la partie

entière du réel k).

$r + s$ (mod 2)	$r - s$ (mod 8)	$C_{r,s}^+$	$C_{r,s}$
0	0	$m(2^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor}, \mathbf{R}) \oplus$ $m(2^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor}, \mathbf{R})$	$m(2^{\frac{m}{2}}, \mathbf{R})$
1	1	$m(2^{\frac{m-1}{2}}, \mathbf{R})$	$m(2^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}, \mathbf{R}) \oplus$ $m(2^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}, \mathbf{R})$
0	2	$m(2^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor}, \mathbf{C})$	$m(2^{\frac{m}{2}}, \mathbf{R})$
1	3	$m(2^{\frac{m-1}{2}-1}, \mathbf{H})$	$m(2^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}, \mathbf{C})$
0	4	$m(2^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor-1}, \mathbf{H}) \oplus$ $m(2^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor-1}, \mathbf{H})$	$m(2^{\frac{m}{2}-1}, \mathbf{H})$
1	5	$m(2^{\frac{m-1}{2}-1}, \mathbf{H})$	$m(2^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor-1}, \mathbf{H}) \oplus$ $m(2^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor-1}, \mathbf{H})$
0	6	$m(2^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor}, \mathbf{C})$	$m(2^{\frac{m}{2}-1}, \mathbf{H})$
1	7	$m(2^{\frac{m-1}{2}}, \mathbf{R})$	$m(2^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}, \mathbf{C})$

2.3. ALGÈBRES DE CLIFFORD COMPLEXES

Considérons, alors, l'algèbre de Clifford complexe de l'espace quadratique régulier standard (\mathcal{E}, Q) sur le corps complexe \mathbf{C} . Selon [5, b] page 331, corollaire VIII-11, si $\dim \mathcal{E} = 2k$, $C(\mathcal{E}, Q)$ est isomorphe à $m(2^k, \mathbf{C})$ et si $\dim \mathcal{E} = 2k+1$, $C(\mathcal{E}, Q)$ est isomorphe à $m(2^k, \mathbf{C}) \oplus m(2^k, \mathbf{C})$.

Cette périodicité modulo 2 est liée au fait que le groupe de Brauer Wall de \mathbf{C} $BW(\mathbf{C}) \approx \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ (cf. [26] et [27]).

3. Formes Sesquilinéaires sur un Espace Quaternioniens à Droite E sur H

3.1. LE THÉORÈME SUIVANT ([1] PAGE 154, [5]) EST FONDAMENTAL

Théorème : L désigne un corps commutatif muni d'un automorphisme involutif $\lambda \rightarrow \bar{\lambda}$. K est le sous-corps des invariants.

Soit A une algèbre simple centrale ayant pour centre le corps L . Soient α et β deux anti-involutions sur A associées au même automorphisme involutif de L . L'une d'elle, par exemple β , est la composée de l'autre α et d'un automorphisme intérieur par un élément u qui est soit α -symétrique, soit α -antisymétrique $a^\beta = (a^\alpha)^{j(u)} = u^{-1}a^\alpha u$, ($a \in A$), avec $u^\alpha = u$ ou $u^\alpha = -u$. u est déterminé à un facteur scalaire non nul près, Si $u^\alpha = u$ on a $u^\alpha = u^\beta = u$. Si $u^\alpha = -u$ on a $u^\beta = u^\alpha = u$. Les propriétés algébriques des anti-involutions sur les algèbres réelles ont fait aussi l'objet d'une étude détaillée dans [18].

3.2. LES GROUPES $SpU(p, q)$ ET $SO^*(2n)$, [5,b], [2,a], GROUPES QUATERNIONIENS

a) Quelques rappels

Pour X et Y espaces vectoriels à droite de dimension finie sur \mathbf{H} , $L(X, Y)$ espace vectoriel des applications linéaires, (à droite), de X dans Y est un espace vectoriel sur le centre \mathbf{R} de \mathbf{H} et possède une structure d'algèbre réelle si $X = Y$. On note ν la conjugaison qui au quaternion $q = \alpha + i\beta + j\gamma + k\delta$ où $1, i, j, k$ sont les "unités" de \mathbf{H} associe $q^\nu = \alpha - i\beta - j\gamma - k\delta \in \mathbf{H}$. Le théorème d'Albert donné dans [1] page 154 s'applique à l'algèbre réelle centrale simple \mathbf{H} .

Toute anti-involution α de \mathbf{H} est donc la composée de la conjugaison ν et d'un automorphisme intérieur par un élément u qui est soit ν -symétrique soit ν -anti-symétrique $q^\alpha = u^{-1}q^\nu u$ avec $u^\nu = u$ ou $u^\nu = -u$. Si $u^\nu = u$ on a $u^\alpha = u^\nu = u$. Si $u^\nu = -u$, on a $u^\alpha = u^\nu = -u$.

(De plus, l'automorphisme principal π de l'algèbre de Clifford réelle \mathbf{H} est naturellement l'application $q \rightarrow k^{-1}qk = -kqk$ car $k^{-1} = -k$ et que $\pi(q) = \alpha - i\beta - j\gamma + k\delta$.)

Soit E un espace vectoriel quaternionien à droite sur \mathbf{H} de dimension n , de base $\varepsilon = \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$.

Une forme sesquilinéaire b sur E est une application b de $E \times E$ dans \mathbf{H} telle que pour tous $x, y, x_i, y_i \in E$, ($i = 1, 2$), pour tout $q \in \mathbf{H}$, $b(x, yq) = b(x, y)q$; $b(xq, y) = q^\nu b(x, y)$; $b(x_1 + x_2, y) = b(x_1, y) + b(x_2, y)$, $b(x, y_1 + y_2) = b(x, y_1) + b(x, y_2)$. $b(x, y) = ({}^t X)^\nu B Y$; où B, X, Y sont les matrices respectives dans ε de b, x, y .

En restreignant le corps \mathbf{H} à \mathbf{C} , E est un \mathbf{C} -espace vectoriel de base $\tilde{\varepsilon} = \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, \varepsilon_1 j, \dots, \varepsilon_n j\}$ et les composantes de b relativement à la structure com-

plexe de E sont les formes à valeurs complexes h et a définies par $b(x, y) = h(x, y) + ja(x, y)$ où a est bilinéaire complexe et h sesquilinéaire (linéaire en le second argument et anti-linéaire en le premier).

b est dite symétrique ou **H**-hermitienne si et seulement si $(b(y, x))^\nu = b(x, y)$ pour tous $x, y \in E$, ce qui entraîne que $b(x, x)$ est réel quel que soit x .

b est dite anti-symétrique ou **H**-anti-hermitienne si et seulement si $(b(y, x))^\nu = -b(x, y)$ pour tous $x, y \in E$, ce qui entraîne que $b(x, x)$ est un quaternion pur quel que soit x . L'utilisation du théorème d'Albert permet de ramener l'étude de formes sesquilinéaires **H**-anti-hermitiennes à celles des formes sesquilinéaires **H**-hermitiennes par un changement de l'anti-involution de **H**.

En effet, si b est anti-symétrique pour ν , id est si pour tous $x, y \in E$, $b(y, x) = -(b(x, y))^\nu$ posons $g(x, y) = b(x, y)j$, id est $b(x, y) = g(x, y)j^{-1}$. Alors $g(y, x) = b(y, x)j = -(b(x, y))^\nu j = -(g(x, y)j^{-1})^\nu j = j^\nu (g(x, y))^\nu j = -j(g(x, y)^\nu)j = g(x, y)^\tau$ car $\tau = \pi \circ \nu = \nu \circ \pi$. Et donc $g(y, x) = g(x, y)^\tau$ et g est symétrique pour l'anti-involution τ de **H**.

b) Le groupe $SpU(p, q)$

Soit $\{|\cdot|\}$ un produit scalaire quaternionien sur E , id est une forme sesquilinéaire symétrique telle que pour tout $x \in E - \{0\}$, $\{x|x\} > 0$.

Les composantes de $\{|\cdot|\}$ sur l'espace vectoriel complexe E sont un produit scalaire hermitien noté $\langle \cdot | \cdot \rangle$ et un produit scalaire symplectique noté $[\cdot | \cdot]$: $\{x|y\} = \langle x|y \rangle + j[x|y]$. Ainsi le groupe symplectique $SpU(S) = U(S) \cap Sp(S)$. Si l'on munit E d'un produit scalaire pseudo-quaternionien de type (p, q) dont les composantes sur l'espace vectoriel complexe sont un produit scalaire pseudo-hermitien de type $(2p, 2q)$ et un produit scalaire symplectique, on obtient la décomposition $SpU(p, q) = U(2p, 2q) \cap Sp(2(p+q), \mathbf{C})$. Comme $U(p, q) = SO(2p, 2q) \cap Sp(2(p+q), \mathbf{R})$ (cf. [2,d], [2,e]), il en résulte que $SpU(p, q) = SO(4p, 4q) \cap Sp(2(p+q), \mathbf{C}) \cap Sp(4(p+q), \mathbf{R})$. E est aussi un **R**-espace vectoriel de dimension $4n = 4(p+q)$ dont une base sur **R** est $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, \varepsilon_1 i, \dots, \varepsilon_n i, \varepsilon_1 j, \dots, \varepsilon_n j, \varepsilon_1 k, \dots, \varepsilon_n k\}$. Considérons alors l'opérateur anti-linéaire de l'espace vectoriel complexe E de dimension $2n$, T défini par $T(x) = xj$ (l'anti-linéarité vient de ce que $(xi)j = -(xj)i$ pour tout $x \in E$). Il est immédiat que $T^2 = -Id$. Réciproquement, comme il est noté dans [5,b] page 440, la donnée d'un tel opérateur T sur un espace vectoriel complexe impose la parité de la dimension de celui-ci et la définition d'une structure quaternionienne en posant $x.q = x.(z + jz') = xz + (xj)z' = xz + T(z)z'$. On a alors le théorème suivant,

dont la démonstration est immédiate.

Théorème 1 *Le groupe symplectique unitaire $SpU(p, q)$ est le commutant de T dans $U(2p, 2q)$ et dans $Sp(2(p + q), \mathbf{C})$.*

Ecrivons $b(x, y) = h(x, y) + ja(x, y)$ où h est un produit scalaire pseudo-hermitien de type $(2p, 2q)$ et a est bilinéaire anti-symétrique complexe non dégénérée. Ainsi $h(u(x), u(y)) = h(x, y)$, qui traduit l'appartenance de u à $U(2p, 2q)$, et $u \circ T = T \circ u$ impliquent que $a(u(x), u(y)) = h(u(x), j, u(y))$ car, [5,b] page 441, $h(xj, y) = a(x, y)$ pour tous x, y ; donc $a(u(x), u(y)) = h(T \circ u(x), u(y)) = h(u \circ T(x), u(y))$ car $u \circ T = T \circ u$, et donc $a(u(x), u(y)) = h(T(x), y)$ car $u \in U(2p, 2q)$ et donc $a(u(x), u(y)) = a(x, y)$. On montre de même que $u \circ T = T \circ u$ et l'appartenance de u à $Sp(2(p + q), \mathbf{C})$ impliquent l'appartenance de u à $SpU(p, q)$.

c) Le groupe $SO^*(2n)$ comme groupe quaternionien

Rappelons, [2,e] page 83, que si b est une forme sesquilinéaire antisymétrique pour la structure quaternionienne sur $E, b(x, y) = h(x, y) + ja(x, y)$ où h est anti-hermitienne et a bilinéaire symétrique complexe. On peut définir les notions de base orthogonale, de vecteur isotrope, de sous-espace isotrope et totalement isotrope, d'indice r de b , dimension maximale des sous-espaces totalement isotropes de E pour b vérifiant $2r \leq n$ [6,b]. Le théorème de Witt s'applique encore. Il existe (cf. [6,a,b,c,d]) une base orthogonale $(\varepsilon_l)_{1 \leq l \leq n}$ telle que pour tout $l, 1 \leq l \leq n, b(\varepsilon_l, \varepsilon_l) = j$, le quaternion unité de carré - 1 de \mathbf{H} .

Il en résulte que toutes les formes sesquilinéaires anti-hermitiennes sur E non dégénérées sont équivalentes et d'indice maximal $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Soit donc b , non dégénérée \mathbf{H} -anti-hermitienne. Si l'on pose

$$x = \sum_{l=1}^n \varepsilon_l x^l, y = \sum_{l=1}^n \varepsilon_l y^l$$

et si l'on écrit les quaternions composantes de x et $y, x^l = \xi^l + j\xi^{n+l}, y^l = \eta^l + j\eta^{n+l}$ où les ξ^l et les η^l sont des nombres complexes, on obtient que

$$b(x, y) = \sum_{l=1}^n (\bar{\xi}^l - j\xi^{n+l})j(\eta^l + j\eta^{n+l}) = \sum_{l=1}^n (-\bar{\xi}^l \eta^{n+l} + \bar{\xi}^{n+l} \eta^l) + j \sum_{l=1}^{2n} \xi^l \eta^l.$$

On trouve ainsi que le groupe unitaire des automorphismes de E qui conser-

vent $bU_n(E, b)$ que l'on convient d'appeler *groupe symplecto-quaternionien* est l'intersection du groupe unitaire $U_{2n}(\mathbf{C}, h)$ pour la forme anti-hermitienne h non dégénérée sur l'espace vectoriel complexe E et du groupe orthogonal complexe $O(2n, \mathbf{C})$. On écrit donc $U_n(E, b) = U_{2n}(\mathbf{C}, h) \cap O(2n, \mathbf{C})$.

Il en résulte, comme déjà dit en [2,e] que $SU_n(E, b) = SO^*(2n)$. De plus, comme la forme complexe h est anti-hermitienne $h(x, y) = \alpha(x, y) + i\beta(x, y)$ où, selon [5,b], α est une forme bilinéaire réelle antisymétrique non dégénérée, β est une forme bilinéaire réelle symétrique non dégénérée neutre de type $(2n, 2n)$. (On le retrouve immédiatement en écrivant que ih est pseudo-hermitienne neutre de type $(2n, 2n)$.) Donc $U_{2n}(\mathbf{C}, h) = Sp(4n, \mathbf{R}) \cap O(2n, 2n)$. Et par suite $SO^*(2n) = Sp(4n, \mathbf{R}) \cap SO(2n, 2n) \cap SO(2n, \mathbf{C})$. On retrouve ainsi simplement que $SO^*(2n)$ est un sous-groupe de $Sp(4n, \mathbf{R})$ ce qui, dans les notations de Siegel-Satake correspond au plongement holomorphe $(II_n \rightarrow III_{2n})$ - cf. [34] page 279 (exercice 4) -. On note aussi que l'appartenance de h à $SO^*(2n)$ qui implique celle de ih à $SU(n, n)$ permet de retrouver l'inclusion naturelle de $SO^*(2n)$ dans $SU(n, n)$ (cf. [34] page 278). On a le théorème (dont la démonstration est calquée sur celle du théorème 1):

Théorème 2 $SO^*(2n)$ est le commutant de T dans $SO(2n, \mathbf{C})$.

3.3. QUELQUES COMPLÉMENTS SUR LES ESPACES (E, b) QUATERNIONIENS À DROITE DE DIMENSION n SUR \mathbf{H} MUNIS D'UNE FORME SESQUILINÉAIRE

Soit $\{\varepsilon_l\}_{1 \leq l \leq n}$ une base orthogonale pour b de E . Introduisons T défini par $T(x) = xj$ anti-linéaire pour la structure complexe sous-jacente à E , E devient un \mathbf{C} -espace vectoriel de dimension $2n$ sur \mathbf{C} dont une base est $\{e_1, \dots, e_n, T(e_1), \dots, T(e_n)\}$. Écrivons alors $b(x, y) = h(x, y) + ja(x, y)$ et décomposons $h(x, y) = \alpha(x, y) + if(x, y)$ et $a(x, y) = \alpha'(x, y) + if'(x, y)$ en leur composantes réelles. Introduisant naturellement l'opérateur J auquel est subordonnée la structure complexe, comme par définition pour $x \in E, q = u + jv = a + ib + jc + kd, a, b, c, d, \in \mathbf{R}, u = a + ib \in \mathbf{C}, v = c - id \in \mathbf{C}, x(u + jv) = xu + T(x)v$. On obtient $x(a + ib) + T(x)(c - id) = xa + J(x)b + T(x) + T \circ J(x)d$ en notant bien que $T \circ J = -J \circ T$ car $(xi)j = -(xj)i$ (avec $T^2(x) = -x$). Ainsi E est un \mathbf{R} -espace vectoriel donc une base sur \mathbf{R} est naturellement $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, J(\varepsilon_n), T(\varepsilon_1), \dots, T(\varepsilon_n), T \circ J(\varepsilon_1), \dots, T \circ J(\varepsilon_n)\}$.

Les relations fondamentales, [5,b] page 441, $h(Tx, y) = a(x, y)$ et $a(Tx, y) =$

$-h(x, y)$ se traduisent immédiatement par

$$(I) \begin{cases} \alpha(Tx, y) = \alpha'(x, y) \text{ et } \alpha'(Tx, y) = -\alpha(x, y) \\ f(Tx, y) = f'(x, y), f'(Tx, y) = -f(x, y) \end{cases}$$

En écrivant la linéarité de h par rapport au second argument ($h(x, yi) = ih(x, y)$) et l'antilinearité de h par rapport au premier argument, ($h(xi, y) = -ih(x, y)$), on obtient ainsi (II):

$$\begin{cases} \alpha(xi, y) = f(x, y) \\ f(xi, y) = -\alpha(x, y) \end{cases}$$

et donc

$$\begin{cases} \alpha(Jx, y) = f(x, y) \\ f(Jx, y) = -\alpha(x, y) \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \alpha(x, Jy) = -f(x, y) \\ f(x, Jy) = \alpha(x, y) \end{cases}$$

De même le fait que a est bilinéaire complexe entraîne que

$$(III) \begin{cases} \alpha'(Jx, y) = -f'(x, y) \\ f'(Jx, y) = \alpha'(x, y) \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \alpha'(x, Jy) = -f'(x, y) \\ f'(x, Jy) = \alpha'(x, y) \end{cases}$$

De même $b(x, Ty) = b(x, y)j$ entraîne que

$$\begin{cases} \alpha(x, Ty) = -\alpha'(x, y) \\ f(x, Ty) = f'(x, y) \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \alpha'(x, Ty) = \alpha(x, y) \\ f'(x, Ty) = -f(x, y) \end{cases}$$

et $b(Tx, y) = -jb(x, y)$ implique que

$$(IV) \begin{cases} \alpha(Tx, y) = -\alpha'(x, y) \\ f(Tx, y) = f'(x, y) \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \alpha'(Tx, y) = -\alpha(x, y) \\ f'(Tx, y) = -f(x, y) \end{cases}$$

4. Algèbre de Clifford Naturellement Associée à une Forme b Sesquilinéaire H-anti-hermitienne non Dégénérée

4.1.

Soit E un espace vectoriel quaternionien à droite de dimension n sur \mathbf{H} , muni d'une forme sesquilinéaire b antisymétrique non dégénérée pour la structure quaternionienne. On écrit $b(x, y) = h(x, y) + ja(x, y)$ où h est antihermitienne et a bilinéaire symétrique complexe, le groupe unitaire de b noté $U_n(E, b)$ et appelé par définition, groupe symplecto-quaternionien est $U_n(E, b) = U_{2n}(\mathbf{C}, h) \cap O(2n, \mathbf{C})$ et $SU_n(E, b) = SO^*(2n)$. De plus $SO^*(2n) = SU_n(E, b)$ est le commutant de T dans $SU_{2n}(\mathbf{C}, h)$ et dans $SO(2n, \mathbf{C})$ où T est l'opérateur de transfert qui définit la structure quaternionienne associée à la structure complexe de E ; T est un opérateur anti-linéaire id est tel que $T(xi) = -T(x)i$. La base orthogonale de S pour $b(\varepsilon_l)_{1 \leq l \leq n}$ choisie, vérifie, rappelons le $b(\varepsilon_l, \varepsilon_l) = j$. De plus, pour tout $x \in E, T^2(x) = -x$.

Considérons, alors, l'algèbre de Clifford complexe de l'espace quadratique régulier standard (\mathcal{E}, Q) sur le corps complexe \mathbf{C} . Selon [5,b] page 331, corollaire VIII-11 si $\dim \mathcal{E} = 2k, C(\mathcal{E}, Q)$ est isomorphe à $m(2^k, \mathbf{C})$ et si $\dim \mathcal{E} = 2k + 1, C(\mathcal{E}, Q)$ est isomorphe à $m(2^k, \mathbf{C}) \oplus m(2^k, \mathbf{C})$.

Cette périodicité modulo 2 est liée au fait que le groupe de Brauer Wall de \mathbf{C} , $BW(\mathbf{C}) \approx \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ (cf. [26] et [27]).

Il en résulte que, selon le théorème VIII-2-D de [5,b] page 296, si

$\dim \mathcal{E} = 2p, C^+(\mathcal{E}, q) \simeq m(2^{p-1}, \mathbf{C}) \oplus m(2^{p-1}, \mathbf{C})$ et si

$\dim \mathcal{E} = 2p + 1, C^+(\mathcal{E}, q) \simeq m(2^p, \mathbf{C})$.

Soit, alors, l'algèbre de Clifford complexe C_{2n} de l'espace vectoriel complexe E de dimension $2n$ munie de la forme quadratique standard (dont la forme bilinéaire symétrique complexe polaire est la forme $a(x, y)$ composante de $b(x, y)$ suivant j).

L'espace quaternionien E de dimension n sur \mathbf{H} s'identifie donc au couple (\sum_{2n}, T) où \sum_{2n} est l'espace vectoriel complexe E obtenu en restreignant les scalaires à \mathbf{C} et T l'opérateur de transfert.

$C_{2n} = C_{2n}^+ \oplus C_{2n}^-$, où C_{2n}^+ est la sous-algèbre paire complexe et C_{2n}^- le sous-espace des éléments impairs (C_{2n}^- est un C_{2n}^+ -module). Soit ν la - conjugaison qui induit sur \mathbf{C} la conjugaison usuelle $\sigma z \rightarrow \bar{z}$.

Théorème 3 *Il existe une application antilinéaire \tilde{T} de C_{2n} dans C_{2n} telle que*

- a) C_{2n}^+ et C_{2n}^- sont invariants pour l'action de \tilde{T} ,
- b) $\tilde{T}^2(c) = c$, pour tout $c \in C_{2n}^+$ et $\tilde{T}^2(c) = -c$ pour tout $c \in C_{2n}^-$,
- c) $\tilde{T}(c_1 c_2) = \tilde{T}(c_1) \tilde{T}(c_2)$ pour tous $c_1, c_2 \in C_{2n}$.

Considérons l'algèbre tensorielle $\mathcal{T} = \otimes \sum_{2n}$ et définissons l'application antilinéaire T_1 de $\mathcal{T} = \otimes \sum_{2n}$ dans $\mathcal{T} = \otimes \sum_{2n}$ par

- $T_1(x_1 \otimes \dots \otimes x_k) = T(x_1)T(x_2)\dots T(x_k)$,
- $T_1(\lambda) = \bar{\lambda}$, pour tout $\lambda \in \mathbf{C}$.

T_1 est parfaitement défini. Soit alors Q la forme quadratique associée à la forme bilinéaire symétrique complexe a et $N(Q)$ l'idéal bilatère engendré par les éléments $x \otimes x - Q(x) \cdot 1$. On note que $Q(Tx) = a(Tx, Tx) = \overline{a(x, x)} = \overline{Q(x)}$, (cf. [5,b] page 441) et comme $T_1(Q(x)) = \overline{Q(x)}$, $T_1(x \otimes x - Q(x).1) = T_1(x) \otimes T_1(x) - Q(\overline{T_1(x)}) \cdot 1$. T_1 laisse donc $N(Q)$ invariant et T_1 induit \tilde{T} application antilinéaire de C_{2n} dans C_{2n} qui possède les propriétés signalées.

On peut remarquer que C_{2n}^- est un espace vectoriel quaternionien à droite sur \mathbf{H} en posant pour $q = u + jv \in \mathbf{H}$, $c \in C_{2n}^-$, $c(u + jv) = cu + \tilde{T}(c)v$ (C_{2n}^- est muni d'un opérateur de transfert \tilde{T} tel que $\tilde{T}^2 = -Id$ sur C_{2n}^-).

Ce théorème est un cas particulier d'un théorème plus général. Donnons d'abord une définition, due à Albert [1].

Définition *Soit A une algèbre sur un corps K commutatif muni d'un automorphisme σ et Σ une transformation de A sur A . Σ est appelée σ -semi-automorphisme (ou automorphisme relativement à σ) si Σ est un automorphisme pour la structure d'anneau de A , id est pour tous $a, b \in A$ $(a+b)^\Sigma = a^\Sigma + b^\Sigma$, $(ab)^\Sigma = a^\Sigma b^\Sigma$ et si Σ antilinéaire (ou semilinéaire relativement à σ) pour la loi externe id est si pour tout $\alpha \in K$, tout $a \in A$, $(\alpha a)^\Sigma = \alpha^\sigma a^\Sigma$. En particulier, si l'algèbre est unitaire $\alpha^\Sigma = (\alpha 1)^\Sigma = \alpha^\sigma \cdot 1 = \alpha^\sigma$. Si l'automorphisme σ est l'identité, Σ est un automorphisme de l'algèbre A .*

En effet, \tilde{T} est un σ -semi-automorphisme de l'algèbre C_{2n} complexe relativement à $\sigma z \in \mathbf{C} \rightarrow z^\sigma = \bar{z}$. On a noté aussi que $Q(Tx) = \overline{Q(x)}$, T est donc une semi-similitude de rapport 1 pour l'automorphisme σ de \mathbf{C} (cf. [6,a] page 17-18) (pour tous $x, y \in E$, $a(Tx, Ty) = \overline{a(x, y)}$). Notons alors que si (f, ρ) est une semi-similitude pour Q de rapport ρ id est une transformation semi-linéaire de \sum_{2n} sur lui-même relativement à σ telle que $Q(f(x)) = \rho Q(x)^\sigma = \rho \overline{Q(x)}$, il existe un semi-automorphisme Σ de $T^+(\sum_{2n}) = \oplus_\rho \otimes^{2\rho} (\sum_{2n})$, -relativement à σ - associé à (f, ρ) et défini comme suit

$$(y_1 \otimes y_2 \otimes \dots \otimes y_{2t})^\Sigma = \rho^{-t} f(y_1) \otimes f(y_2) \otimes \dots \otimes f(y_{2t})$$

Soit alors $N^+(Q) = N(Q) \cap T^+(\sum_{2n})$ où $N(Q)$ est l'idéal bilatère engendré par les éléments de la forme $x \otimes x - Q(x).1$. Montrons alors que Σ laisse $N^+(Q)$ invariant. Il suffit pour le montrer, de considérer les éléments de la forme $v = y_1 \otimes y_2 \otimes \dots \otimes y_r \otimes u \otimes z_1 \otimes \dots \otimes z_s$ avec $r + s = 2t$ et $u = x \otimes x - Q(x).1$. Alors:

$$v^\Sigma = \rho^{-(t+1)} f(y_1) \otimes \dots \otimes f(y_r) \otimes f(x) \otimes f(x) \otimes f(z_1) \otimes \dots \otimes f(z_s) \\ - \rho^{-1} Q(x)^\sigma f(y_1) \otimes \dots \otimes f(y_r) \otimes f(z_1) \otimes \dots \otimes f(z_s).$$

Comme $\rho^{-1}(f(x) \otimes (f(x) - Q(x)^\sigma 1) = \rho^{-1}(f(x) \otimes f(x) - Q(f(x)).1) = \rho^{-1}w \in N^+$, $v^\Sigma = \rho^{-(t+1)}(f(y_1)) \otimes \dots \otimes f(y_r) \otimes w \otimes f(z_1) \otimes \dots \otimes f(z_s) \in N^+(Q)$. Alors, Σ induit un semi-automorphisme $\tilde{\Sigma}$ relativement à σ de C_{2n}^+ que l'on appellera le semi-automorphisme associé à (f, ρ) . On a $(x_1 x_2 \dots x_{2n})^\Sigma = \rho^{-n}(f(x_1) \dots f(x_{2n}))$. Si x_1, \dots, x_{2n} forment un système de vecteurs orthogonaux, il en est de même pour les vecteurs $f(x_1) \dots f(x_{2n})$. Si l'on désigne par $C^2(\sum_{2n})$ avec les notations de [5, b] page 327, l'espace vectoriel "des 2-vecteurs", $\tilde{\Sigma}$ transforme $C^2(\sum_{2n})$ en lui-même et par suite $\tilde{\Sigma}$ est homogène de degré 0.

Rappelons que Q associée à $a(x, y)$ est non dégénérée. Comme la dimension de \sum_{2n} est $2n$, $C^{2n}(\sum_{2n})$ est une droite complexe. Pour tout élément $e \neq 0 \in C^2(\sum_{2n})$, $e^\Sigma = \alpha e$. Comme $e^2 = \delta \in \mathbf{C}$, $\delta^\sigma = (e^2)^\Sigma = (e^\Sigma)^2 = \alpha^2 \delta$. Si on choisit pour σ l'identité, on trouve la définition usuelle des similitudes, Σ est un automorphisme et on a donc $\alpha^2 = 1$, et $e^\Sigma = \pm e$. Une similitude est dite propre, respectivement impropre si et seulement si $e^\Sigma = e$, respectivement $e^\Sigma = -e$. Le groupe GO^+ des similitudes propres est un sous-groupe d'indice 2 du groupe GO des similitudes. On note GO^- l'autre classe des similitudes impropres.

Donnons maintenant un théorème

Théorème 4 $u \in SO(2n, \mathbf{C})$ et $uT = Tu$ si et seulement si u induit un automorphisme intérieur Φ_u de C_{2n} tel que pour tout $x \in \sum_{2n}$, il existe $b_u \in C_{2n}^+$ tel que $\Phi_u(x) = b_u x b_u^{-1} = u(x)$ et $\tilde{T}(b_u) = b_u$.

• Si $u \in SO(2n, \mathbf{C})$ et $uT = Tu$, il existe $b_u \in C_{2n}^+$ tel que avec les notations classiques de [5, b], $\Phi_{b_u}(x) = b_u x b_u^{-1} = u(x)$, $b_u = x_1, \dots, x_{2n}$, modulo un facteur scalaire appartenant à \mathbf{R}^* où les $x_i, 1 \leq i \leq 2n$ appartient à \sum_{2n} et, par définition de \tilde{T} , σ -semi-automorphisme associée à la semi-similitude T de \sum_{2n} , $\tilde{T}(b_u) = b_u$, car $\rho = 1$.

• Réciproquement, si u induit un automorphisme intérieur de C_{2n} tel que

$\Phi_u(x) = b_u x b_u^{-1} = u(x)$ avec $b_u \in C_{2n}^+$, alors nécessairement $u \in SO(2n, \mathbf{C})$.
 Comme $\tilde{T}(b_u) = b_u$, il en résulte que $\tilde{T}(b_u^{-1}) = b_u^{-1}$. Alors $u(\tilde{T}(x)) = b_u \tilde{T}(x) b_u^{-1} = \tilde{T}(b_u x b_u^{-1}) = \tilde{T}(u(x))$ donc $uT = T u$; ce théorème permet de donner un sens à la définition 1 qui suit

Définition 1 On appelle algèbre de Clifford associée au $SO^*(2n)$ l'algèbre réelle notée $Cl_{2n}^* = \{g \in C_{2n}^+ \mid \tilde{T}(g) = g\} = \{z + \tilde{T}(z), z \in C_{2n}^+\}$.¹

Théorème 5 L'algèbre réelle Cl_{2n}^* est telle que $C_{2n}^+ \simeq Cl_{2n}^* \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$ et $\dim_{\mathbf{R}} Cl_{2n}^* = 2^{2n-1}$.

La démonstration repose sur la remarque fondamentale que quelle que soit la parité de la dimension n de l'espace quaternionien à droite E , l'algèbre paire C_{2n}^+ est toujours isomorphe à $m(2^{n-1}, \mathbf{C}) \oplus m(2^{n-1}, \mathbf{C})$ comme on le vérifie immédiatement en tenant compte des rappels donnés en 2.3.

C_{2n}^+ est donc composée directe de deux sous-algèbres simples.

Il en résulte que Cl_{2n}^* est toujours isomorphe à $m(2^{n-1}, \mathbf{C})$.

En effet, l'opérateur involutif T est antilinéaire sur un espace complexe. Dès lors, la multiplication par i - ($i^2 = -1$) - échange les sous-espaces propres pour les valeurs propres i et $-i$ et on a bien $C_{2n}^+ \simeq Cl_{2n}^* \otimes \mathbf{C}$

en étudiant la décomposition de la semi-involution \tilde{T} de C_{2n}^+ , compte tenu du lemme 2-I-2 page 3 de [6,c].

On peut alors donner une caractérisation algébrique intrinsèque de l'algèbre Cl_{2n}^* .

Définition 2 Soit ψ_1 l'application de E dans Cl_{2n}^* définie par $\psi_1(x) = \frac{1}{2}(x.T(x) - T(x).x)$. $\psi_1(x) = x.T(x) - a(x, T(x))$ car, dans l'algèbre de Clifford $C_{2n}(Q)$ où Q est, rappelons de la forme quadratique associée à a , $2a(x, y) = xy + yx$.

- ψ_T est bien une application de E dans Cl_{2n}^* car $\tilde{T}(\psi_T(x)) = \psi_T(x)$ car $T^2(x) = -x$.

- L'application ψ_T est quadratique sur \mathbf{R} , ce qui signifie que $\psi_T(\lambda x) = \lambda^2 \psi_T(x)$ pour tout $x \in E$ et tout $\lambda \in \mathbf{R}$, et $\psi(x, y) = \frac{1}{2}\{\psi_T(x + y) - \psi_T(x) - \psi_T(y)\} = \frac{1}{4}(x.Ty - Tx.y + yTx - Ty.x)$ est une application \mathbf{R} -bilinéaire symétrique de $E \times E$ dans C_{2n}^* . On note alors que pour tout $x \in E$, $\psi(x, x) = \psi_T(x)$ et que $\psi_T(Tx) = \psi_T(x) = T(\psi_T(x))$. On va, alors, montrer le:

¹ Il est immédiat de noter que si $a = z + \tilde{T}(z)$, alors $\tilde{T}(a) = a$ et réciproquement si g est tel que $\tilde{T}(g) = g$, $g = \frac{1}{2}g + \frac{1}{2}g = \frac{1}{2}g + \frac{1}{2}\tilde{T}g = z + \tilde{T}(z)$ où $z = \frac{1}{2}g \in C_{2n}^+$.

Théorème 6 Cl_{2n}^* est l'algèbre réelle associative engendrée par les $\psi_T(x)$ pour $x \in E$.

Soit F l'algèbre réelle engendrée par les $\psi_T(x)$ pour $x \in E$.

• On note que pour tous $x, y \in E, \psi(x, y) \in F$. Puis comme pour tout $x \in E, \psi(x, Tx) = \frac{1}{4}(-x^2 - (Tx)^2 + (TX)^2 + x^2) = 0, 0 \in F$. De plus, un calcul immédiat montre que $(\psi_T(x))^2 = \frac{1}{4}((x.TX)^2 + (Tx.x)^2 - 2|Q(x)|^2)$ car $Q(T(x)) = \overline{Q(x)}$. Or, comme on l'a vu, (I) $xTx = \psi_T(x) + a(x, Tx)$, remplaçant x par Tx , on obtient donc $-Tx.x = \psi_T(x) - a(x, Tx)$, car $\psi_T(x) = \psi_T(Tx)$ et a est bilinéaire symétrique complexe. De plus, appliquant T aux deux membres de l'égalité (I) on obtient $-Tx.x = \psi_T(x) + a(x, Tx)$, car $T \circ \psi_T(x) = \psi_T(x)$ et $T(z) = \bar{z}$ pour $z \in \mathbf{C}$. Il en résulte, immédiatement, que $a(x, T(x)) = i\beta(x) \in \mathbf{R}$ et par suite que $xTx + Tx.x = 2i\beta(x)$, pour tout $x \in E, \beta(x) \in \mathbf{R}$. Par suite, $(xTx)^2 + (Tx.x)^2 = -4\beta^2(x) - 2|Q(x)|^2$ et donc $(\psi_T(x))^2 = \frac{1}{4}[-4\beta x^2 - 4|Q(x)|^2] = -[\beta^2(x) + |Q(x)|^2] \in \mathbf{R}^-$. La fonction $x \rightarrow \beta(x)$ introduite de E dans \mathbf{R} n'est ni additive ni linéaire. Un calcul immédiat montre, par exemple, que $2i\beta(x+y) = 2i\beta(x) + 2i\beta(y) + 2a(x, Ty) + 2a(y, Tx)$. Or, comme $a(x, Ty) + a(y, Tx) = a(Ty, x) + a(Tx, y)$ car a est symétrique et comme, selon [5,b] page 441 $a(Ty, x) = -h(y, x)$ et $a(Tx, y) = -h(x, y)$, $a(x, Ty) + a(Tx, y) = -[h(y, x) + h(x, y)]$ et comme h est anti-hermitienne, $a(x, Ty) + a(Tx, y) = -[h(x, y) - \overline{h(x, y)}] = -2if(x, y) = -2Im(h(x, y))$ - en posant $h(x, y) = \alpha(x, y) + if(x, y)$ - on obtient donc que $\beta(x+y) = \beta(x) + \beta(y) - 2f(x, y)$ où $f(x, y)$ est selon [5,b] la partie imaginaire d'une forme sesquilinéaire anti-hermitienne et est donc bilinéaire symétrique réelle. De plus, comme $\beta(\lambda x) = \lambda^2\beta(x)$ pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$. β est quadratique sur \mathbf{R} et donc $(\psi_T(x))^2 = -|Q(x)|^2 - \beta^2(x)$ et β est la forme quadratique non dégénérée sur \mathbf{R} canoniquement associée à la partie imaginaire de $h, f(x, y)$ (qui en est la forme polaire) et donc $\beta(x) = f(x, x)$. On note, de plus, que $xTx + Tx.x = 2a(x, Tx) = 2i\beta(x)$, donc $a(x, Tx) = i\beta(x) = if(x, x) = Im(h(x, x))$ et que $\beta(Tx) = -\beta(x)$, car $-Tx.x - xTx = 2i\beta(Tx)$ et que $xTx + Tx.x = 2i\beta(x)$. (On le retrouve aussi en utilisant les formules IV de la partie 3.3) car $f(Tx, y) = f'(x, y)$ donc $f(Tx, Ty) = f'(Tx, y) = -f(x, y)$ et donc $f(Tx, Tx) = \beta(T(x)) = -\beta(x)$, de plus T est autoadjoint pour f car $f(Tx, y) = f'(x, y) = f(x, Ty)$ selon les formules IV de 3.3.

Il en résulte que $\psi_T(x) = xTx - i\beta(x)$ et que $\psi(x, y) = \frac{1}{2}(x.Ty + yTx) - if(x, y) = \frac{1}{2}(xTy + yTx) - Im(h(x, y))$.

Comme Q est non dégénérée, et β est non dégénérée (cf. lemme IV-4 page 139 de [5,b]), il en résulte que $\mathbf{R}^- \in F$ et par suite $\mathbf{R} \subset F$; introduisons alors $C_{2n}^+(2s)$ espace des $2s$ -vecteurs associé à C_{2n}^+ et montrons par récurrence sur s que $Cl_{2n}^* \cap C_{2n}^+(2s) \subset F$.

Etude du cas où $s = 1$

Comme $\mathbf{R} \subset F$, il suffit de montrer que pour tous $x, y \in E, \tilde{T}y + \tilde{T}(x\tilde{T}y) \in F$. En effet, $z \in Cl_{2n}^* \cap C_{2p,2q}^+(2s)$ si et seulement si $z = x_1x_2 + \tilde{T}(x_1x_2), x_1, x_2 \in E$. Comme $\tilde{T}^2 = -Id$ sur E , il existe $y_2 = \tilde{T}(-x_2) = -\tilde{T}(x_2)$ tel que $\tilde{T}(y_2) = x_2$, donc z est bien de la forme $x.\tilde{T}(y) + \tilde{T}(x.\tilde{T}(y))$. Or, d'une part, $2a(x, Ty) = xTy + Ty.x$ et, comme pour tout $z \in \mathbf{C}, T(z) = \bar{z}, 2\overline{a(x, Ty)} = -Tx.y - yTx$, donc $2a(x, Ty) + 2\overline{a(x, Ty)} = (xTy - Tx.x) + (Ty.x - y.Tx)$ et d'autre part, $4\psi(x, y) = (xTy - Tx.y) - (Ty.x - y.Tx)$. Il en résulte que $(xTy - Tx.y) = \underbrace{a(x.Ty) + \overline{a(x, Ty)}}_{\in \mathbf{R} \subset F} + \underbrace{\psi(x, y)}_{\in F}$ et donc $x\tilde{T}y - \tilde{T}x.y = x\tilde{T}(y) + \tilde{T}(x\tilde{T}(y)) \in F$. On note, au passage les 2 formules:

$$xTy - Tx.y = a(x, Ty) + \overline{a(x, Ty)} + 2\psi(x, y) \text{ et}$$

$$Ty.x - yTx = a(x, Ty) + \overline{a(x, Ty)} - 2\psi(x, y).$$

Etude du cas où $s \geq 2$

Si $z \in C_{2n}^+(2s)$, écrivons $z = uv, u \in C_{2n}^+(2k), v \in C_{2n}^+(2l), k, l < s$. Par hypothèse, on peut supposer que $Cl_{2n}^* \cap C_{2n}^+(2t) \subset F$ pour tout $t < s$. Ecrivons alors

$$uv + \tilde{T}(uv) = \left\{ \frac{u}{2} + \tilde{T}\frac{u}{2} \right\} (v + \tilde{T}(v)) + \left\{ u - \tilde{T}(u) \right\} \left\{ \frac{v}{2} - \tilde{T}\left(\frac{v}{2}\right) \right\} = w_1w_2 + z_1z_2.$$

$w_1w_2 \in Cl_{2n}^*$ et comme $\tilde{T}(z_2) = -z_2, \tilde{T}(z_1z_2) = z_1z_2$. En raison de l'hypothèse de récurrence, w_1w_2 et z_1z_2 appartiennent à F et donc $uv + \tilde{T}(uv) \in F$.

4.2. DÉFINITION 2 DE L'ALGÈBRE DE CLIFFORD NATURELLEMENT ASSOCIÉE À $SO^*(2n)$

Soit A une \mathbf{R} -algèbre associative unitaire.

4.2.1. Définition d'une application de Clifford associée au triplet $(E, SO^*(2n), A)$

Définition On appelle application de Clifford associée à $(E, SO^*(2n))$ toute application \mathcal{G} de E dans A telle que

α) pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, $\mathcal{G}(\lambda x) = \lambda^2 \mathcal{G}(x)$.

β) $\frac{1}{2}\{\mathcal{G}(x+y) - \mathcal{G}(x) - \mathcal{G}(y)\} = g(x, y)$ où g est une application \mathbf{R} -bilinéaire de $E \times E$ dans A .

γ) $(\mathcal{G}(x))^2 + \beta^2(x)1_A = -|Q(x)|^2 1_A$ où β est la forme quadratique sur \mathbf{R} associée à la forme bilinéaire symétrique réelle égale à la composante complexe pure de h et Q la forme quadratique complexe telle que $Q(x) = a(x, x)$ où a est la composante suivant j de $b(x, y)$.

On note que si B est une autre algèbre associative avec unité sur \mathbf{R} et si Φ est un homomorphisme d'algèbre avec unités de A dans B , alors l'application composée $\mathcal{G}_1 = \Phi \circ \mathcal{G}$ de E dans B est une application de Clifford associée au triplet $(E, SO^*(2n), B)$. On vérifie, en effet, aisément que $\mathcal{G}_1(\lambda x) = \lambda^2(x)$ pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, que $g_1(x, y) = \frac{1}{2}[\mathcal{G}_1(x+y) - \mathcal{G}_1(x) - \mathcal{G}_1(y)]$ est \mathbf{R} -bilinéaire de $E \times E$ dans B et que $(\mathcal{G}_1(x))^2 = (\Phi \circ \mathcal{G}(x))^2 = \Phi(\mathcal{G}(x)^2) = \Phi(-|Q(x)|^2 1_A - \beta^2(x)1_A) = -(|Q(x)|^2 + \beta^2(x))1_A$.

Par abus de langage une telle application de Clifford pourra être appelée application de Clifford de type symplecto-quaternionien "spécial".

4.2.2. Définition 2 de l'algèbre de Clifford associée au couple $(E, SO^*(2n))$

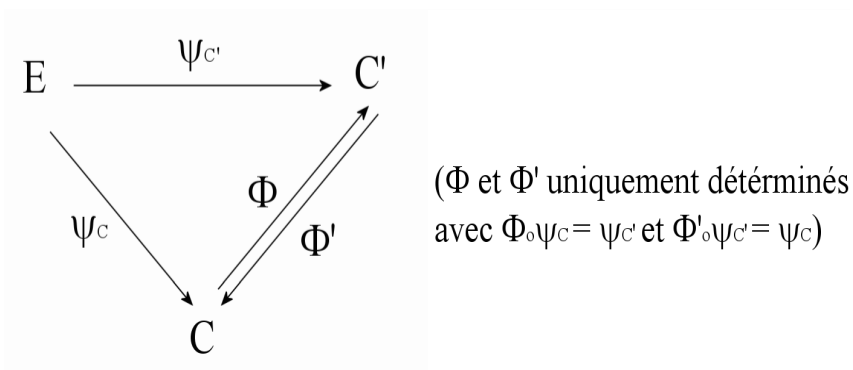
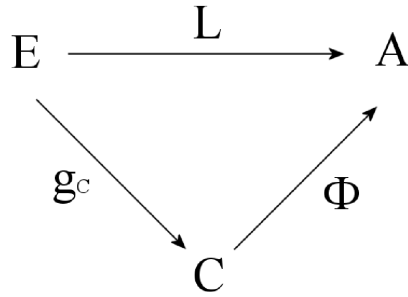
E désigne un espace vectoriel quaternionien à droite de dimension n sur \mathbf{H} . $SO^*(2n)$ est choisi comme groupe fondamental de sa géométrie.

Définition 2 On appelle algèbre de Clifford associée à $(E, SO^*(2n))$ toute \mathbf{R} -algèbre associative C avec élément unité 1_C , munie d'une application de Clifford g_C "de type symplecto-quaternionien spécial" dans C satisfaisant aux conditions suivantes

1) $g_C(E)$ engendre C .

2) quelle que soit l'application de Clifford "de type symplecto-quaternionien spécial" L de (E, b) dans l'algèbre A , (\mathbf{R} -algèbre associative unitaire), il existe un homomorphisme d'algèbres avec unité Φ de C dans A tel que $L = \Phi \circ g_C$ $\forall x \in E$, $\Phi(g_C(x)) = L(x)$ La deuxième condition exprime que toute application de Clifford de type symplecto-quaternionien spécial de (E, b) peut être obtenue à partir de l'application g_C unique qui est donc universelle.

En effet, si C' est une autre algèbre de Clifford de E le diagramme entraîne $\Phi' \circ \Phi \circ \psi_C = \Phi' \circ \psi_{C'} = \psi_C$ et $\Phi \circ \Phi' \circ \psi_{C'} = \Phi \circ \psi_C = \psi_{C'}$.



Comme $\psi_C(E)$ engendre C et que $\psi_{C'}(E)$ engendre C' , on en déduit que $\Phi' \circ \Phi = Id_C$ et $\Phi \circ \Phi' = Id_{C'}$. (Φ et Φ' sont donc des isomorphismes, uniquement déterminés, inverses l'un de l'autre échangeant φ_C en $\varphi_{C'}$ ou $\varphi_{C'}$ en φ_C). Une conséquence immédiate de cette définition est que si un espace (E, SO^*2n) de type symplecto-quaternionien spécial possède une algèbre de Clifford C , elle est unique à un isomorphisme près.

On peut donc parler de l'algèbre de Clifford de l'espace $(E, SO^(2n))$ de type symplecto-quaternionien spécial.*

Il en résulte immédiatement de la définition 1 et des théorèmes 3 et 4 qui précèdent le

4.2.3.

Théorème 7 *Suivant la définition 2, tout espace $(E, SO^*(2n))$ de type symplecto-quaternionien spécial possède une algèbre de Clifford notée Cl_{2n}^* , $\dim_{\mathbf{R}} Cl_{2n}^* = 2^{2n-1}$ si $\dim E = n$. Cl_{2n}^* est celle que soit la parité de n toujours isomorphe à $m(2^{n-1}, \mathbf{C})$.*

En effet, Cl_{2n}^* définie au sens de la définition satisfait aux conditions requises par la définition 2.

4.2.4. Construction d'un système de générateurs de Cl_{2n}^*

Reprenons la base $(\varepsilon_l)_{1 \leq l \leq n}$ de l'espace quaternionien E à droite sur \mathbf{H} orthogonale pour la forme sesquilinéaire b telle que pour tout $l, 1 \leq l \leq n$, $b(\varepsilon_l, \varepsilon_l) = j$.

Il en résulte immédiatement, que pour l'espace complexe $E = \sum_{2n}$ de dimension complexe $2n$ muni de la forme bilinéaire symétrique complexe $a(x, y)$ l'ensemble $\{\varepsilon_l, T(\varepsilon_l), 1 \leq l \leq n, 1 \leq k \leq n\}$ est une base orthogonale pour a .

En effet, comme a est bilinéaire symétrique, selon [5, b] page 441,

$$a(T\varepsilon_k, \varepsilon_l) = -h(\varepsilon_k, \varepsilon_l) = 0, \text{ pour } k \neq l, ja(\varepsilon_l, \varepsilon_l) = b(\varepsilon_l, \varepsilon_l) = j \text{ et}$$

$$a(T\varepsilon_k, T\varepsilon_k) = -h(\varepsilon_k, T\varepsilon_k) = -[-\overline{a(\varepsilon_k, \varepsilon_k)}] = 1 \text{ et}$$

$$a(\varepsilon_k, T\varepsilon_k) = -h(\varepsilon_k, \varepsilon_k) = 0.$$

Il est classique que C_{2n} est engendré sur \mathbf{C} par les éléments $\varepsilon_1, \varepsilon_1\varepsilon_2, \dots, \varepsilon_1\varepsilon_n$ et $\varepsilon_1T\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_1T\varepsilon_n$ et que C_{2n}^+ admet comme système de générateurs, sur \mathbf{C} , les éléments $1, \varepsilon_1\varepsilon_2, \dots, \varepsilon_1\varepsilon_n, T\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_1T\varepsilon_n$ (car $\{\varepsilon_l, T\varepsilon_k\}$ est une base orthogonale de l'espace vectoriel complexe pour la forme a).

Or $\psi(x, y) = \frac{1}{2}(xTy + yTx) - if(x, y)$, comme on l'a vu ci-dessus dans la démonstration du théorème 5 de cette partie 4.

On vérifie immédiatement en raison des formules données au 3.3 (formules I, II, III, IV) que la base $\{\varepsilon_k, J(\varepsilon_l), T(\varepsilon_p), T(J(\varepsilon_q))\}$ est orthogonale pour la forme bilinéaire symétrique réelle sur l'espace vectoriel réel de dimension $4n$ sous-jacent à \sum_{2n} .

Ainsi, pour $k \neq l$

$$\psi(\varepsilon_k, \varepsilon_l) = \frac{1}{2}(\varepsilon_kT\varepsilon_l + \varepsilon_lT\varepsilon_k) = \frac{1}{2}(\varepsilon_kT\varepsilon_l - T\varepsilon_k\varepsilon_l) \text{ car } f(\varepsilon_k, \varepsilon_l) = 0$$

et donc

$$\psi(\varepsilon_k, \varepsilon_l) = \frac{1}{2}(\varepsilon_k T \varepsilon_l + T(\varepsilon_k T \varepsilon_l)).$$

De même:

$$\psi(\varepsilon_k, T \varepsilon_l) = -\frac{1}{2}(\varepsilon_k \varepsilon_l + T(\varepsilon_k, \varepsilon_l))$$

pour $k \neq l$ et pour $k = l$.

Il en résulte, vu la définition de Cl_{2n}^* , que

$$1, \psi(\varepsilon_1, \varepsilon_2), \dots, \psi(\varepsilon_1, \varepsilon_n), \psi(\varepsilon_1, T \varepsilon_1), \dots, \psi(\varepsilon_1, T \varepsilon_n)$$

est un système de générateurs de l'algèbre réelle Cl_{2n}^* .

4.3. GROUPES DE CLIFFORD ET GROUPES DE REVÊTEMENT DE $SO^*(2n)$

Selon [5,b] page 359, comme $2n$ est pair \tilde{G}_{2n} , groupe de Clifford régulier est égal au groupe de Clifford ordinaire G_{2n} et l'on a la suite de groupes

$$1 \rightarrow \mathbf{C}^* \rightarrow \tilde{G}_{2n} \rightarrow O(2n, \mathbf{C}) \rightarrow 1.$$

On en déduit la suite exacte de groupe

$$1 \rightarrow \mathbf{C}^* \rightarrow \tilde{G}_{2n}^+ \rightarrow SO(2n, \mathbf{C}) \rightarrow 1$$

où \tilde{G}_{2n}^+ est le groupe régulier de Clifford pair. On introduit alors les groupes de revêtements à deux feuillets respectifs de $O(2n, \mathbf{C})$ et de $SO(2n, \mathbf{C})$ notés $RO(2n, \mathbf{C})$ et $RO^+(2n, \mathbf{C}) = Spin(2n, \mathbf{C})$ et dit groupe spinoriel complexe ([5b] page 364).

On obtient

4.3.1.

Théorème 8 Pour tout $v \in SO^*(2n)$, il existe un élément inversible $b \in Cl_{2n}^*$, déterminé modulo un scalaire appartenant à \mathbf{R}^* tel que $\Phi_v(x) = b_v x b_v^{-1} = v(x)$ pour tout $x \in E$.

Réciproquement, pour tout b inversible appartenant à Cl_{2n}^* tel que pour $x \in E$, $b x b^{-1} = y \in E$, l'application $x \rightarrow b x b^{-1}$ induit un élément de $SO^*(2n)$.

- La première partie découle du théorème 4 qui précède et de la définition 1

de Cl_{2n}^* .

• Réciproquement, à tout élément inversible $b \in Cl_{2n}^*$ tel que pour tout $x \in E$, $bx b^{-1} = y \in E$, correspond $v \in SO(2n, \mathbf{C})$ tel que $\Phi_v(x) = bx b^{-1} = v(x)$ pour tout $x \in E$. Choisissons alors T et \tilde{T} comme précédemment; alors, pour tout $x \in E$ et tout $y \in E$ identifié à (Σ_{2n}, T) , tel que $Q(y) = \overline{Q(T(y))} \neq 0$, comme $bx b^{-1} \in E$, on peut écrire

$$\tilde{T}(bx b^{-1}y) = \tilde{T}(bx b^{-1})\tilde{T}(y) = b\tilde{T}(x)b^{-1}\tilde{T}(y)$$

id est

$$[\tilde{T}(bx b^{-1}) - b\tilde{T}(x)b^{-1}]\tilde{T}(y) = 0$$

et vu l'hypothèse sur y , on en déduit que pour tout $x \in E$, $\tilde{T}(bx b^{-1}) = b\tilde{T}(x)b^{-1}$ id est $T \circ v = v \circ T$ et donc $v \in SO^*(2n)$ par définition. On en déduit que la restriction de $\varphi : G_{2n}^+ \rightarrow SO(2n, \mathbf{C})$ - avec les notations de [5,b] - à $G_{2n}^+ \cap Cl_{2n}^*$ est un homomorphisme surjectif de noyau R^* auquel est associée la suite exacte

$$1 \rightarrow \mathbf{R}^* \rightarrow G_{2n}^+ \cap Cl_{2n}^* \rightarrow SO^*(2n) \rightarrow 1.$$

$G_{2n}^+ \cap Cl_{2n}^* = \tilde{G}_{2n}^+ \cap Cl_{2n}^*$ est appelé groupe de Clifford ou groupe de Clifford régulier naturellement associé à $SO^*(2n)$. On introduit de même $RSO^*(2n)$ groupe de revêtement du groupe $SO^*(2n)$ et $Spin_{2n}^*$ dit groupe spinoriel de type symplecto-quaternionien spécial respectivement définis par $RSO^*(2n) = Cl_{2n}^* \cap RO^*(2n, \mathbf{C}) = Spin(2n, \mathbf{C}) \cap Cl_{2n}^*$ et par suite $Spin_{2n}^* = G_0(2n, \mathbf{C}) \cap Cl_{2n}^*$, où $G_0(2n, \mathbf{C})$ est le groupe de Clifford réduit, noyau de l'homomorphisme N (norme usuelle) ou N' (norme graduée) de $G_{2n}^+ = \tilde{G}_{2n}^+$ dans \mathbf{C}^* (sous-groupe de Clifford pair formé des éléments de norme 1). Ici, comme le corps K de l'espace quadratique régulier considéré est \mathbf{C} , le corps des complexes, $G_0(2n, \mathbf{C})$ est $RO^+(2n, \mathbf{C})$ et $Spin_{2n}^* = RSO^*(2n)$.

4.4. DIAGRAMME FONDAMENTAL ATTACHÉ AU GROUPE $SO^*(2n)$

4.4.1. Quelques rappels. Les groupes considérés par Atiyah-Bott et Shapiro

Dans leur article, [0], M.F..Atiyah, R. Bott et A. Shapiro définissent des groupes au-dessus de $O(Q)$ ou (E, Q) est un espace quadratique régulier réel antieuclydien.

Ils introduisent le groupe $T = U(1)$ multiplicatif des nombres complexes de

module 1 et le complexifié (E^C, Q^C) de (E, Q) de sorte que l'algèbre de Clifford $Cl(Q^C)$ définie sur ce complexifié est isomorphe à la complexifiée de $Cl(Q)$. La dimension de E est ≥ 1 . Ils montrent alors, [0] page 9, le théorème fondamental et son corollaire qui suivent

Théorème Soit $G^C(E, Q)$ le sous groupe des éléments inversibles g de la complexifiée de $Cl(Q)$ qui vérifient $\forall y \in E, \pi(g)yg^{-1} \in E$. Soit alors $RO^C(E, Q)$ le noyau de la norme spinorielle graduée N' .

On a la suite exacte

$$1 \rightarrow U(1) \rightarrow RO^C(E, Q) \xrightarrow{\delta} O(Q) \rightarrow 1.$$

Corollaire On a un isomorphisme naturel

$RO(E, Q) \times_{\mathbf{Z}_2} U(1) \simeq RO^C(E, Q)$ où l'action de \mathbf{Z}_2 sur le produit $RO(E, Q) \times U(1)$ est définie par

$$(\varepsilon, (g, z)) \in \mathbf{Z}_2 \times (RO(E, Q) \times U(1)) \rightarrow (\varepsilon g, \varepsilon z) \in RO(E, Q) \times U(1).$$

La démonstration originelle donnée dans [0] page 9 se transporte immédiatement au cas d'un espace quadratique régulier standard quelconque (E, Q) où la signature de Q est quelconque. On introduit comme ci-dessus, la définition suivante (la dimension de E est supposée supérieure ou égale à 1).

Définition Soit $A(Q)$ l'un quelconque des groupes classiques $RO(Q), G(Q), Spin Q$, posons $A^U(Q) = A(Q) \times_{\mathbf{Z}_2} U(1)$ où l'action de \mathbf{Z}_2 sur le produit $A(Q) \times U(1)$ est définie par $(\varepsilon, (g, z)) \in \mathbf{Z}_2 \times (A(Q) \times U(1)) \rightarrow (\varepsilon g, \varepsilon z) \in A(Q) \times U(1)$.

On obtient alors le théorème qui suit et son corollaire dont la démonstration est identique à celle donnée dans [0] page 9.

Théorème Soit $G^C(E, Q)$ le sous groupe des éléments inversibles g de la complexifiée de $Cl(Q)$ qui vérifient $\forall y \in E, \pi(g)yg^{-1} \in E$. Soit alors $RO^C(E, Q)$ le noyau de la norme spinorielle graduée N' .

On a la suite exacte

$$1 \rightarrow U(1) \rightarrow RO^C(E, Q) \xrightarrow{\delta} O(Q) \rightarrow 1.$$

Corollaire $RO^C(E, Q)$ est naturellement isomorphe à

$RO(Q) \times_{\mathbf{Z}_2} U(1)$.

Remarque On note aussi, que $N'(RO^C(E, Q)) = U(1)$.

On vérifie que ce diagramme est commutatif en raison du théorème et de son corollaire énoncés au 4.1.

5. Espaces de Spineurs Naturellement Associés au Groupe $SO^*(2n)$. Structures Subordonnées à ces Espaces. Plongements Correspondants des Groupes Spinoriels

Comme on l'a vu dans la partie 4 au théorème 5, C_{2n}^+ est toujours isomorphe à $m(2^{n-1}, \mathbf{C}) \oplus m(2^{n-1}, \mathbf{C})$, donc est composée directe de deux algèbres simples centrales complexes. Cl_{2n}^* est, aussi, toujours isomorphe à $m(2^{n-1}, \mathbf{C})$, isomorphe à l'algèbre paire $(Cl_{2n}^+)^+$ complexe, algèbre centrale complexe pour laquelle les résultats de [5a] vont s'appliquer. Cl_{2n}^* possède un $Cl(b)$ -module simple S unique à un isomorphisme près et espace des spineurs naturellement associé à Cl_{2n}^* . Rappelons que si α est une anti-involution antilinéaire de Cl_{2n}^* , il lui est associé un produit scalaire pseudo-hermitien sur S dont α est précisément l'opération d'adjonction. Si (r, s) est la signature de ce produit scalaire, on associe à l'anti-involution antilinéaire α de Cl_{2n}^* une forme hermitienne non dégénérée sur Cl_{2n}^* : $(x, y) \in Cl_{2n}^* \times Cl_{2n}^* \rightarrow Tr(l(x^\alpha y))$ dont la forme hermitienne quadratique correspondante a pour signature, $(r^2 + s^2, 2rs)$ ([5,a] page 220). En utilisant le raisonnement de [5,a] page 220-221, on montre que cette fois, la forme pseudo-hermitienne $(x, y) \rightarrow Tr l(x^\tau y)$ est une forme neutre de signature $(2^{n-2}, 2^{n-2})$ et par suite l'espace des spineurs associé naturellement à Cl_{2n}^* possède une structure naturelle complexe, et un produit scalaire pseudohermitien neutre déterminé à un facteur scalaire près, invariant par le groupe spinoriel. Comme dans [2,e] ou dans [5,b] on vérifie alors que $Spin_{2n}^* \subset SU(2^{n-2}, 2^{n-2})$.

Théorème Recapitulatif 9

$$Spin_{2n}^* \subset SU(2^{n-2}, 2^{n-2}).$$

References.

- [0] Atiyah M. F., R. Bott and A. Shapero, Clifford modules, *Topology*, **3** Suppl. 1, 3-38 (1964).
- [1] Albert A., Structures of Algebras, "American Math. Soc." **XXIV**, New York, 1939.

- [2] Anglès P.,
 a) Construction de revêtements du groupe conforme d'un espace vectoriel muni d'une métrique de type (p,q) , "Annales de l'I.H.P.", Section A XXXIII (1), 33-51 1980.
 b) Géométrie spinorielle conforme orthogonale triviale et groupes de spinorialité conforme, *Report HTKX Mat A 195*, Helsinki University of Technology, 1-36 (1982).
 c) Real conformal spin structures, *Scientiarum Mathematicarum Hungarica*, **23**, Budapest - Hongrie, 115-139 (1988).
 d) Construction de revêtements du groupe symplectique réel $CSp(2r, \mathbf{R})$. Géométrie conforme symplectique réelle. Définition des structures spinorielles conformes symplectiques réelles, Simon Stevin (Gand-Belgique), **60** (1), 57-82 Mars (1986).
 e) Algèbres de Clifford $C_{r,s}^+$ des espaces quadratiques pseudo-euclidiens standards $E_{r,s}$ et structures correspondantes sur les espaces de spineurs associés. Plongements naturels de quadriques projectives $Q(E_{r,s})$ associés aux espaces $E_{r,s}$, *Nato ASI Séries 183*, 79-91 "Clifford Algebras" édité par J.S.R. Chisholm et A.K. Common D. Reidel Publishing Company, 1986.
 f) Groupes spinoriels des espaces pseudo-euclidiens standards et quadriques projectives réelles associées, **63** (1), 3-44 Mars (1989). Simon Stevin, *a quarterly Journal of pure and applied mathematics*. Gand, Belgique.
- [3] Cartan E.,
 a) "The theory of Spinors", Hermann, Paris, 1966.
 b) Sur les propriétés topologiques des quadriques complexes, *Oeuvres complètes*, tome 1 (2), 1227-1246.
- [4] Chevalley C.,
 a) "The Algebraic theory of Spinors", Columbia university Press New York, 1954.
 b) "The construction and study of certain important algebras", The Math. Soc. of Japan, 1955.
- [5] Deheuvels R.,
 a) Groupes conformes et algèbres de Clifford, *Rend-Sem. Mat. Univers., Politech. Torino 43* (2), 205-226 (1985).
 b) "Formes Quadratiques et groupes classiques", Presses Universitaires de France, Paris, 1980.
 c) Les structures exceptionnelles en algèbre et géométrie, Preprint, Paris, 1-24 (1986).
 d) "Cours de troisième cycle à l'école polytechnique", Paris, 1966-1967.

- [6] Dieudonné J.,
 - a) “La géométrie des groupes classiques”, Springer, 1955.
 - b) On the structure of Unitary groupes I, *Trans. Am. Math. Soc.* **72**, 367-385 (1952); II. *Amer. J. Math.* **75**, 665-678 (1953).
 - c) On the automorphisms of the classical groups, *Memoirs Am. Math. Soc.*, **2-I**, 1-95 (1951).
 - d) “Sur les groupes classiques”, Hermann, 1973.
 - e) Sur les groupes unitaires quaternioniques à 2 et 3 variables, *Bull. Soc. Math.* **77**, 195-213 (1953).
- [7] Helgason S., “Differential Geometry and symmetric spaces”, Academic Press New York and London, 1962.
- [8] Hermann R., Spinors Clifford and Cayley algebras, “Interdisciplinary Math.”, **VII**, Math. Sci. Press, Brookline Ma, U.S.A., 1974.
- [9] Artin E., “Algèbre géométrique”, Gauthier Villars, 1972.
- [10] Jacobson N., Clifford algebras for algebras with involution of type D, *Journal of Algebras* **1**, 288-301 (1964).
- [11] Postnikov M., “Leçons de Géométrie-Groupes et Algèbres de Lie”, Traduction française, Editions Mir, Moscou, 1985.
- [12] Wolf J., On the classification of hermitian symmetric spaces, *Journal of Math. and Mechanics*, **13** 489-496 (1964).
- [13] Tits J., Formes quadratiques. Groupes orthogonaux et algèbres de Clifford, *Inventiones Math.* **5**, 19-41 (1968).
- [14] Seip Hornix E. A. M., Clifford algebra of quadratic quaternion, *Proc. Kon. Ned. Akad. Wet.* **A. 68**, 326-363 (1965).
- [15] Van Drooge D. C., Spinor theory of quadratic quaternion forms, *Proc. Kon. Ned. Akad. Wet.* **A 70**, 487-523 (1967).
- [16] Michelson M. L., Clifford and spinor cohomology, *American Journal of Mathematics*, **106** (6), 1083-1146 (1980).
- [17] Lawson H.B. Jr et M.L. Micheloon, Clifford bundles. Immersions of manifolds and the vector field problem, *Journal of differential geometry*, **15**, 237-267 (1980).
- [18] Lichnerowitz A.,
 - a) Champs spinoriels et propagateurs en relativité générale, *Bull. Soc. Math. de France*, **92**, 11-100 (1964).
 - b) “Cours du Collège de France”, ronéotypé, non publié, 1933- 1964.
 - c) “Théorie globale des connexions et des groupes d’holonomie”, Edition Cremonese, Rome, 1962.

- [19] Meara O. T. O.,
 - a) "Introduction to quadratic forms", Springer, 3ième édition, 1973.
 - b) "Symplectic groups", American Math. Society, 1978.
- [20] Wall C. T. C, Graded algebras anti-involutions, simple groups and symmetric spaces, *Bull. Am. Math. Soc.*, **74**, 198-202 (1968).
- [21] Choquet Bruhat Y., "Géométrie différentielle et systèmes extérieurs", Dunod, Paris, 1968.
- [22] Kobayashi S., "Transformation groups in differential geometry", Springer, Berlin, 1978 .
- [23] Malliavin P., "Géométrie différentielle intrinsèque", Hermann, Paris, 1972.
- [24] Sternberg S., "Lectures on differential geometry", P. Hall, New York, 1965.
- [25] Lam T. Y., "The algebraic theory of quadratic forms", K.A. Bergamin Inc., 1973.
- [26] Karoubi Mac, Algèbres de Clifford et K-Theorie, *Ann. Sc. Ecole Normale Sup.*, 4ième série t. I, 161-270 (1968).
- [27] Husemoler D., "Fibre Bundles", Mc Graw Hill Book Company, New York, 1966.
- [28] Porteous I. R., "Topological Geometry", 2nd edition Cambridge University Press, 1931.
- [29] Nordon J., Les éléments d'homologie des quadriques et des hyperquadriques, *Bulletin de la société Mathématique de France*, Tome **74**, 116-129 (1946).
- [30] Steenrod N., "The topology of fibre bundles", Princeton University Press, New Jersey, 1951.
- [31] Besse A. L., "Manifolds all of whose geodesics are closed", Springer Verlag, New York, 1978.
- [32] Kostant B., Quantization and Unitary representations, "Lectures notes in Mathematics", **170**, Springer Verlag, (1970).
- [33] Satake I., "Algebraic structures of symmetric domains", Iwanomi Shoten publishers and Princeton University Press, 1980.
- [34] Eichler M., Ideal Theory der quadratischen formen, *Abh. Math. Sem.*, Hamburg Univers. **18**, 14-37 (1987).
- [35] Bourbaki N., "Eléments de Mathématiques", Livre II chap. IX, Hermann, Paris, 1959.