

FONCTIONS ANALYTIQUES CLIFFORDIENNES

Gaston Casanova
6 Avenue Paul Apell,
75014, Paris, France

(Received: April 05, 2004; Accepted: June 09, 2004)

Abstract. We define analytic functions within Clifford Algebras CL , and study their trigonometric properties. We write the addition formulas when their arguments, A and B in CL , commute, this generalizes ordinary trigonometry. We examine in particular the case $A^2 = 1$.

Nous démontrons un théorème général.

Théorème. I. Si A est un nombre de Clifford ($A \in CL(p, q)$) normé par

$$\|A\| \quad \text{et si} \quad \|A^n\| = \|A\|^n \quad (n \text{ entier positif}) \quad (1)$$

on définit $f(A)$ par son développement

$$f(A) = \sum_0^{+\infty} a_n A^n \quad (2)$$

II. Si A et B sont deux nombres de Clifford qui commutent et qui vérifient (1), alors

$$\exp A \exp B = \exp(A + B) \quad (3)$$

Démonstration. I. Si L est la limite supérieure de $|a_n|^{1/n}$ pour n infini la série (2) est majorée par la série des normes

$$\|f(A)\| \leq \sum_0^{+\infty} |a_n| \|A\|^n \quad (4)$$

qui converge pour

$$\|A\| < 1/L.$$

II. Si A et B commutent on applique à $(A + B)^n$ la formule du binôme de Newton ce qui démontre (3), en appliquant la règle du produit de deux séries normalement convergentes.

Applications trigonométriques.

1° Si ε est une racine carrée de l'unité on pose

$$\exp \varepsilon A = \operatorname{ch} A + \varepsilon \operatorname{sh} A \quad (5)$$

d'où

$$\operatorname{ch} A = \frac{(\exp \varepsilon A + \exp -\varepsilon A)}{2}$$

$$\operatorname{sh} A = \frac{(\exp \varepsilon A - \exp -\varepsilon A)}{2}$$

En utilisant (5) pour $\varepsilon = 1$ et $\varepsilon = -1$ et en multipliant on trouve

$$\operatorname{ch}^2 A - \operatorname{sh}^2 A = 1$$

Signalons encore

$$\exp \varepsilon nA = \operatorname{ch} nA + \varepsilon \operatorname{sh} nA = (\operatorname{ch} A + \varepsilon \operatorname{sh} A)^n \text{ (Moivre)}$$

2° Si $i(i^2 = -1)$ qui appartient à $CL(p, q)$ commute avec A on pose

$$\exp iA = \cos A + i \sin A$$

$$\exp -iA = \cos A - i \sin A$$

et en multipliant

$$\cos^2 A + \sin^2 A = 1 \quad (6)$$

ainsi que

$$\exp niA = \cos nA + i \sin nA = (\cos A + i \sin A)^n \text{ (Moivre)}$$

3° Si A et B commutent

$$\exp \varepsilon(A+B) = (\operatorname{ch}(A+B) + \varepsilon \operatorname{sh}(A+B)) = (\operatorname{ch} A + \varepsilon \operatorname{sh} A)(\operatorname{ch} B + \varepsilon \operatorname{sh} B)$$

d'où en développant

$$\operatorname{ch} A + B = \operatorname{ch} A \operatorname{ch} B + \operatorname{sh} A \operatorname{sh} B$$

$$\operatorname{sh} A + B = \operatorname{sh} A \operatorname{ch} B + \operatorname{sh} B \operatorname{ch} A$$

ainsi que $th(A+B)$

4° Si i, A et B commutent deux à deux, on écrit de la même façon

$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

$$\sin(A+B) = \sin A \cos B + \sin B \cos A$$

et en faisant le rapport $tg(A+B)$.

Cas où A^2 est scalaire.

1° $A^2 = a^2$ (a positif)

Si la fonction f est paire $f(A) = f(-A) = f(a)$

Si la fonction f est impaire $f(A) = -f(-A) = Af(a)$.

Ainsi $\cos A = \cos a$ et $\sin A = A \sin a$.

2° $A^2 = -a^2$

Si $f(A)$ est paire, $\operatorname{ch} A = \cos a$ et $\cos A = \operatorname{ch} a$

Si $f(A)$ est impaire, $\operatorname{sh} A = A \sin a$ et $\sin A = A \operatorname{sh} a$.

Applications.

Les nombres hyperboliques commutent entre eux ainsi qu'avec les racines de l'unité (Voir l'article sur ces nombres dans la Revue) Les quaternions commutent avec $i_3 = e_1 e_2 e_3$ dans $R(3, 0)$ si bien que (6) sera valable.

En général les quaternions ne commutent pas entre eux et on ne peut donc pas leur appliquer les formules d'addition.

Toutefois les quaternions

$$q = q_0 + i_3 ar \text{ et } q' = q'_0 + i_3 br$$

où q_0 et q'_0 sont scalaires ainsi que b tandis que r est dans $R(3, 0)$ un vecteur unitaire ($r^2 = 1$), commutent.

On peut alors leur appliquer les formules d'addition.

Enfin on ne peut avoir $q^2 = 1$ mais $q^2 = -1$ en prenant

$$q = i_3 r$$

si bien que $\cos i_3 r = \text{ch } 1$ et $\sin i_3 r = i_3 r \text{ sh } 1$

$$\text{Arg th } i_3 r = i_3 r \frac{\pi}{4}$$

ou encore

$$\text{Log } i_3 r = i_3 r \frac{\pi}{2}$$