

PRODUIT D'INVERSIONS ELLIPTIQUES OU HYPERBOLIQUES

Gaston Casanova
6 Avenue Paul Apell,
F-Paris, 75014, France

(Received: January 13, 2004; Accepted: March 31, 2004)

Abstract. Let x and y be orthogonal coordinates of a point $M(u = ax + iby$ or $ax + \varepsilon by)$ of a plane where as x' and y' are orthogonal coordinates of a point $M'(V = ax' + iby'$ or $ax' + \varepsilon by')$ inverse of M in the elliptic hyperbolic inversion $u\bar{v} = k$ or $(u - \alpha)(\bar{v} - \alpha) = k'$ (k and k' positive) \bar{v} designating the conjugate of v while i and ε are Clifford numbers such that $i^2 = -1$ and $\varepsilon^2 = 1$ (a and b are real). O is the origin of axes. Ox is the axis of inversions. We study particularly the product of two inversions.

Soit une inversion de centre α sur Ox

$$v - \alpha = \frac{k}{\bar{u} - \alpha} \quad (1)$$

ses points invariants sont sur $(u - \alpha)(\bar{u} - \alpha) = k$

Axe Radical.

Les deux coniques d'axes parallèles sont centrées sur Ox .

$$u\bar{u} = k \quad \text{et} \quad (u - \alpha)(\bar{u} - \alpha) = k' \quad (2)$$

Un point M qui a même puissance par rapport aux deux coniques vérifie

$$u\bar{u} - k = u\bar{u} - \alpha(u + \bar{u}) - k' + \alpha^2$$

ce qui se réécrit

$$x = \frac{(-k' + k + \alpha^2)}{2\alpha} = \beta \quad (3)$$

On rappelle que, si $P(x_0, y_0)$, $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ et si M_1 et M_2 sont les intersections d'une conique avec une droite issue de P , le produit des longueurs $\overline{PM_1} \cdot \overline{PM_2}$ représente les premiers membres de (2), la droite $x = \beta$ étant l'axe radical des coniques passant par P

Coniques Dégénérées du Faisceau.

Soit le faisceau

$$m(u\bar{u} - k) + (u - \alpha)(\bar{u} - \alpha) - k' = 0 \quad (4)$$

m étant un paramètre et, en développant

$$(1 + m)u\bar{u} - \alpha(u + \bar{u}) + \alpha^2 - k' - mk = 0$$

On écrit que le centre γ est sur la conique, soit tous calculs faits $\gamma^2 - 2\beta\gamma + k = 0$, et deux points, réels ou imaginaires $\gamma = \beta \pm \sqrt{\beta^2 - k}$.

La conique dégénérée se compose de deux droites parallèles aux asymptotes et se coupant au centre. Pour les inversions elliptiques les asymptotes sont imaginaires et l'on peut parler dans le domaine réel de points généralisant les points de Poncelet mais pour les inversions hyperboliques, les asymptotes sont réelles.

Produit de Deux Inversions.

1. Les inversions ont même centre.

M a pour inverse $M'(v)$ dans l'inversion $\bar{v}u = k$ et M' a pour inverse $M''(w = ax'' + i(\varepsilon)by'')$ dans l'inversion $v\bar{v} = k'$. Il s'ensuit que M a pour homologue M'' dans l'homothétie

$$w = \frac{k'}{k^u}$$

2. Les deux inversions ont des centres différents.

Ce sont les inversions

$$\bar{v}u = k$$

$$(w - \alpha)(\bar{v} - \alpha) = k'$$

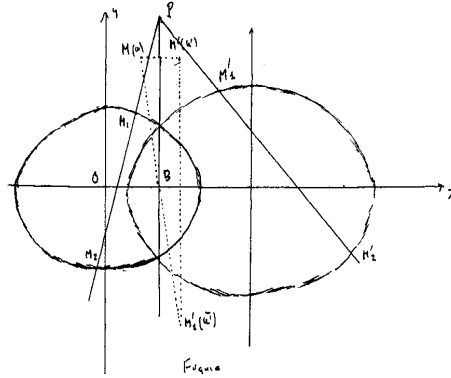


Figure 1

$$\overline{PM_1} \cdot \overline{PM_2} = \sqrt{|a^2(x'_1 - x_0)^2 \pm b^2(y_1 - y_0^2)|} \times \\ \times \sqrt{|a^2(x_2 - x_0)^2 \pm b^2(y_2 - y_0)^2} = \overline{PM'_1} \cdot \overline{PM'_2}$$

Eliminons v et multiplions par u

$$(w - \alpha)(k - \alpha u) = k'u \tag{5}$$

Introduisons le symétrique u' de u par rapport a l'axe radical.
On écrit (voir figure)

$$u + \bar{u}' = 2\beta \tag{6}$$

Remplaçons dans (5) et développons

$$\alpha w \bar{u}' + (k' - \alpha^2) \bar{u}' + (k - 2\alpha\beta)w - \alpha k + 2\alpha^2\beta - 2k'\beta = 0$$

Nous identifions avec l'inversion de centre γ et de puissance k''

$$(\alpha - \gamma)(\bar{u}' - \gamma) = k''$$

et les conditions

$$-\alpha\gamma = k' - \alpha^2 \quad (7)$$

$$-\alpha\gamma = k - 2\alpha\beta \quad (8)$$

$$\alpha(\gamma^2 - k'') = 2\alpha^2\beta - \alpha k - 2k'\beta \quad (9)$$

Les conditions sont compatibles en prenant pour β l'abscisse de l'axe radical et la condition (9) donne tous calculs faits

$$k' = \frac{kk'}{\alpha^2}$$

Le produit de deux inversions est le produit d'une symétrie par rapport à l'axe radical des deux ellipses ou des deux hyperboles d'inversion par une inversion de puissance $\frac{kk'}{\alpha^2}$, α étant la distance des centres pour les coniques d'inversion.

Points Invariants.

Ce sont les points $w = u$, d'où avec (5)

$$u^2 - 2\beta u + k = 0$$

Ce sont les coniques dégénérées du faisceau qui ne sont réelles que pour $\beta^2 > k$, et $u = \beta \pm \varepsilon\sqrt{\beta^2 - k}$ pour les inversions hyperboliques.

Dans les inversions elliptiques il faut envisager le cas $v = u$ et l'intersection d'une ellipse d'inversion avec l'axe radical $u + \bar{u} = 2\beta$ et $u\bar{u} = k$, d'où $u = \beta \pm i\sqrt{k - \beta^2}$ qui n'est réel que pour $k > \beta^2$.

Références

- [1] Casanova Gaston, L'inversion et l'algèbre de Clifford, *Advances in Applied Clifford Algebras* **4** (1), 27-34 (1994)
- [2] Casanova Gaston, Elliptic and Hyperbolic Inversions, *Advances in Applied Clifford Algebras* **11** (2), 287-292 (2001)