GENERALISATION DES FONCTIONS ANALYTIQUES HYPERBOLIQUES

Gaston Casanova
6 Avenue Paul Apell,
75014, Paris, France

(Received: January 15, 2004;   Accepted: March 07, 2004)

Abstract. We generalize the results previously given [1], by puting $u = ax + \varepsilon by$ (a and b are real and positive, ε is a number of Clifford not real having a square equal to 1. Consider x and y being the coordinates of a point M, the axises being rectangular). The analytic functions $f(u)$ are defined by

$$f(u) = \frac{[f(ax+by)+f(ax-by)]}{2} + \varepsilon\frac{[f(ax+by)-f(ax-by)]}{2} \quad (1)$$

Their expansion in power series $f(u) = \sum_0^{+\infty} a_n u^n$ (a_n real) converge in a lozange having its apexes on the axises of coordinates, so that the formulas previousy given are always valid for $\sin u$, $\cos u$. $\mathrm{Log}(1+u)$. Arc $tg(u)$, Arg $th(u)$, $ch(u)$ and $sh(u)$. We give applications.

Norme

On pose: norme de

$$u = ||u|| = a|x| + b|y| \quad (2)$$

On dit que u tend vers $u_0 = ax_0 + \varepsilon by_0$ si, et seulement si

$$||u - u_0|| = a|x - x_0| + b|y - y_0| \quad (3)$$

tend vers 0, c'est-à-dire si $x \to x_0$ et $y \to y_0$

Norme d'un Produit

Posons $u' = ax' + \varepsilon by'$

$$||uu'|| \leq ||u|| \times ||u'|| \tag{4}$$

mais $||u^2|| = ||u||^2$ et si n est un entier positif

$$||u^n|| = ||u||^n \tag{5}$$

ce qui se vérifie en développant u^n par la formule de binòme commutatif.

Dérivée

On suppose $f(u)$ définie sur un ouvert du plan euclidien

$$f'_u(u_0) = \lim_{u=u_0} \frac{[f(u) - f(u_0)]}{u - u_0} \tag{6}$$

si la limite existe. Ainsi $(u^n)'_u = nu^{n-1}$.
Réciproquement une primitive de $f(u)$ notée $\int f(u)$ du admet pour dérivée $f(u)$

Propriétés

On suppose $f(u)$ deux fois continûment dérivable.
On pose

$$f(u) = P(x, y) + \varepsilon Q(x, y) \tag{7}$$

$$P(x, y) = \frac{1}{2}(f^+ + f^-),\ Q(x, y) = \frac{1}{2}(f^+ - f^-) \tag{8}$$

avec $f^+ = f(ax + by)$ et $f^- = f(ax - by)$, si bien que

$$f(u) = \frac{(1+\varepsilon)}{2} f^+ + \frac{(1-\varepsilon)}{2} f^- \tag{9}$$

On vérifie

1^o

$$bP'_x = aQ'_y \quad \text{et} \quad aP'_y = bQ'_x \tag{10}$$

ainsi que

$$b^2 P''_{x^2} = a^2 P''_{y^2}, \quad b^2 Q''_{x^2} = a^2 Q''_{y^2} \tag{11}$$

2^o

$$\int_c f(u)du = \int_c (P + \varepsilon Q)(adx + \varepsilon bdy) =$$

$$\int_c aPdx + bQdy + \varepsilon \int_c aQdx + bPdy = 0$$

le countour c étant un contour fermé sans point double, ce qui se prouve en transformant les intégrales en intégrales doubles et en tenant compte de (10).

Séries Entières

Ce sont les séries

$$f(u) = \sum_{0}^{+\infty} a_n u^n \tag{12}$$

a_n étant réel. On pose: limite supérieure $|a_n|^{\frac{1}{2}} = L$ pour n infini. La série (12) est majorée par la série de terme général

$$|a_n| \cdot ||u||^n$$

Si donc $||u|| < \frac{1}{L}$ la série est absolument convergente, soit

$$a|x| + b|y| < \frac{1}{L}$$

C'est dans le plan euclidien un domaine intérieure à un losange ayant ses sommets sur les axes (Figure 1).

Applications

1^o Si nous considérons les écritures

$$\exp u = v \quad \text{et} \quad u = Log\ v \text{ d'une part}$$
$$\exp u' = v' \quad \text{et} \quad u' = Log\ v' \text{ d'autre part}$$

comme équivalentes, de $(\exp u)(\exp u') = \exp(u + u')$ on déduit la formule d'addition des logarithmes

$$Log\ v + Log\ v' = Log\ (v + v')$$

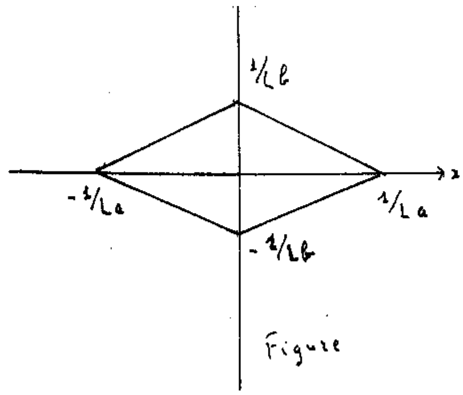

Fig. 1.

2^o On pose $\exp \varepsilon u = ch(u) + \varepsilon sh(u)$ et l'on déduit de

$$(ch(u) + \varepsilon sh(u))(ch(u') + \varepsilon sh(u')) = ch(u + u') + \varepsilon sh(u + u')$$

$$(ch(u) + \varepsilon sh(u))^n = ch(nu) + \varepsilon sh(nu)$$

n étant un entier positif, et toutes les formules de la trigonométrie hyperbolique.
3^o Dans $R(3,0)$, $(e_1e_2e_3)^2 = -1$ ce qui permet de poser $e_1e_2e_3 = i$. Comme $e_1 = \varepsilon$ et que $e_1e_2e_3$ commute avec tous les vecteurs, on voit que i et ε commutent, mais nous n'interpréterons pas leur produit en algèbre de Clifford afin de rester cohérents. On posera

$$\exp iu = \cos u + i \sin u$$

$$(\cos u + i \sin u)^n = \cos nu + i \sin nu$$

et l'on obtiendra toutes les formules de la trigonométrie circulaire pour u et u'.
4^o En intégrant terme à terme le développement de $1/(1 + u)$ on obtient le développement de $Log\ (1 + u)$ pour $||u|| < 1$. De la même façon on obtiendra les développements de $Arc\ tg(u)$ et de $Argth(u)$.

5^o Par application de la formule générale (1)

$$Log\ u = Log\ \sqrt{a^2x^2 - b^2y^2} + \varepsilon Log\ \sqrt{\frac{(ax+by)}{(ax-by)}}$$

pour $a|x| > b|y|$.

Références

1. Casanova G., Fonctions analytiques hyperboliques, *Advances in Applied Clifford Algebras*, **9**(1) pp 91-94, 1999.